



Appendice P

Tubo di Pitot

Introduzione Questa appendice è dedicata alla descrizione del funzionamento della sonda di Pitot, uno degli strumenti più utilizzati per misurare il valore della velocità di un fluido in moto stazionario in un punto dello spazio o la velocità di un corpo in moto rispetto a un fluido in quiete. Si analizza in dettaglio il comportamento dello strumento sia per una corrente incompressibile sia per una corrente comprimibile, considerando per quest'ultima entrambi i casi di corrente subsonica e supersonica.

P.1 Descrizione dello strumento

La **sonda di Pitot**, detta anche **tubo di Pitot**, è uno strumento di misura, la cui sezione è mostrata nella figura P.1. Esso è costituito da un corpo cilindrico, la cui estremità anteriore è arrotondata e nel quale sono state praticate due aperture, una nella parte anteriore l'altra sulla superficie laterale. Le due aperture sono chiamate **prese di pressione** e sono collegate tramite dei condotti interni a due trasduttori di pressione o ai due ingressi di un unico trasduttore di pressione differenziale.

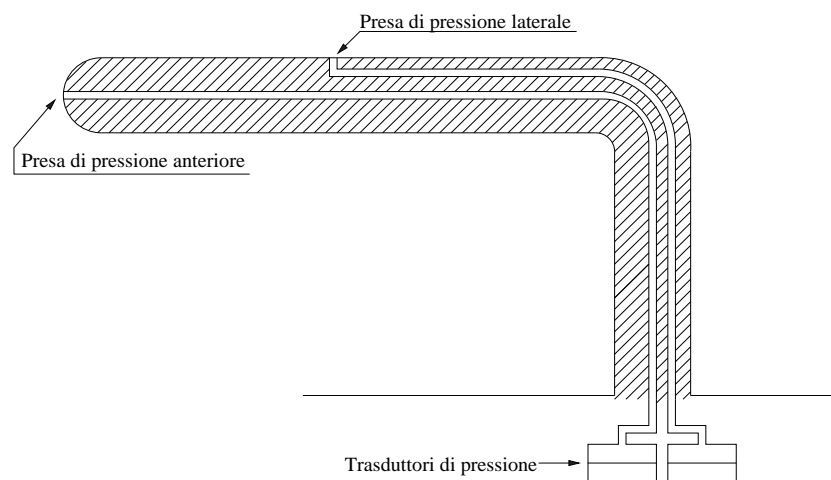


Figura P.1 Sezione di un tubo di Pitot

Posizionando lo strumento in modo che l'asse del tubo sia parallelo alla direzione della corrente fluida, quest'ultima scorre attorno all'ostacolo costituito dal tubo stesso e per ragioni di simmetria la velocità del fluido si annulla in corrispondenza della presa di pressione *anteriore*. Pertanto abbiamo un punto di arresto della corrente, detto punto di ristagno. Dato che il condotto che porta al trasduttore è chiuso ermeticamente dal trasduttore, il fluido nel condotto è in quiete e ha una pressione uniforme uguale a quella esistente nel punto di ristagno. Lungo la linea di corrente che arriva nel punto di ristagno si ha quindi una diminuzione della velocità del fluido dal valore indisturbato, a grande distanza dallo strumento, fino a zero. Come vedremo in seguito, la natura di questa decelerazione è diversa a seconda del valore del numero di Mach della corrente indisturbata.

Per quanto riguarda la presa di pressione sulla superficie *laterale*, osserviamo che anche in questo caso la velocità del fluido all'interno del condotto che porta al trasduttore sarà nulla, per le ragioni esposte in precedenza. Nel caso reale, l'azione della viscosità conduce all'annullarsi della velocità sulla superficie dello strumento (condizione di non scivolamento), mentre invece nel caso ideale di fluido non viscoso





non vi è invece motivo per cui la velocità all'esterno di questa presa debba essere nulla. In effetti il tubo di Pitot è costruito in modo tale che la velocità in questo punto sia il più possibile vicina alla velocità della corrente indisturbata, come sarà spiegato più avanti. In corrispondenza dell'ingresso della presa di pressione laterale è presente perciò una superficie vorticoso e che, se il diametro del foro della presa di pressione è abbastanza piccolo, può essere considerata piana. Se il fluido potesse essere considerato non viscoso, sarebbe in quiete all'interno del condotto e, per quanto detto, avrebbe la stessa pressione del fluido in movimento all'esterno della presa di pressione. Si noti che, anche in questo modello di corrente inviscida, a causa della presenza della superficie vorticoso di discontinuità della velocità non sarebbe possibile applicare il teorema di Bernoulli fra la zona della corrente esterna alla presa di pressione laterale e la zona del fluido dentro il suo condotto, e questa impossibilità varrebbe sia per il teorema nella versione irrotazionale sia in quella delle linee di corrente.

Nella realtà, la viscosità del fluido deve essere tenuta in conto e i fenomeni fluidodinamici che si verificano in corrispondenza della presa di pressione laterale sono molto più complicati. In particolare, all'interno del condotto della presa di pressione laterale si generano moti di cavità. Nel caso in cui, però, la presa di pressione sia sufficientemente piccola, la perturbazione alla misura della pressione dovuta a tali moti può ritenersi trascurabile.

P.2 Correnti incompressibili

Supponiamo che la corrente sia stazionaria e incompressibile. Inoltre supponiamo almeno inizialmente, per semplicità, che la corrente sia anche irrotazionale per cui assumiamo che la viscosità del fluido possa essere trascurata. È opportuno ricordare che in un corrente viscosa risulterebbe soddisfatta la condizione al contorno di perfetta adesione sulla superficie del tubo di Pitot dove quindi si svilupperebbe uno strato limite viscoso. Viceversa, nella corrente ideale inviscida che stiamo considerando e in presenza di forze di volume conservative, ad esempio il campo gravitazionale, vale il teorema di Bernoulli che afferma che il trinomio di Bernoulli è costante in tutto il campo di moto. Inoltre è abbastanza semplice vedere che, nel caso in cui i sensori di pressione collegati alle due prese del tubo di Pitot siano posti alla medesima altezza, il contributo del termine potenziale può essere eliminato senza perdere di generalità. Il teorema di Bernoulli lega fra loro la pressione e il modulo della velocità misurati in due punti distinti e allora è sufficiente conoscere il valore della pressione in due punti qualsiasi e della velocità in uno di questi punti per potere ricavare il valore della velocità nell'altro.

Come abbiamo detto, la sonda di Pitot è realizzata in modo tale che la corrente abbia un punto di ristagno in corrispondenza della presa di pressione anteriore. In tale punto conosciamo dunque sia la pressione, che è misurata, sia la velocità, che è nulla. Misurando il valore della pressione nell'altro punto, ossia quello corrispondente alla presa di pressione laterale, possiamo ricavare la velocità della corrente all'esterno di tale presa. Consideriamo ora separatamente le grandezze fisiche misurate in corrispondenza delle due prese di pressione: la presa di pressione anteriore e la presa laterale.

Presa di pressione anteriore (pressione totale)

Nella regione davanti alla punta del tubo di Pitot gli effetti viscosi possono essere considerati trascurabili (vedi più avanti) per cui si può utilizzare il teorema di Bernoulli considerando un punto all'infinito (∞) a monte dello strumento e il punto (\mathbf{r}_{ant}) in corrispondenza della presa di pressione anteriore

$$P_{\infty} + \frac{1}{2}\bar{\rho}U_{\infty}^2 = P(\mathbf{r}_{\text{ant}}) + \frac{1}{2}\bar{\rho}|\mathbf{u}(\mathbf{r}_{\text{ant}})|^2.$$

Poiché \mathbf{r}_{ant} è il punto di ristagno alla presa anteriore, avremo $\mathbf{u}(\mathbf{r}_{\text{ant}}) = 0$, per cui, scrivendo $P(\mathbf{r}_{\text{ant}}) = P_{\text{ant}}$, otteniamo

$$P_{\infty} + \frac{1}{2}\bar{\rho}U_{\infty}^2 = P_{\text{ant}}.$$





Come si vede, nelle ipotesi fatte, la pressione nel punto di ristagno, detta semplicemente **pressione di ristagno**, eguaglia il valore totale del binomio di Bernoulli nel campo di moto, e viene detta perciò anche **pressione totale**.

Notiamo che la teoria della corrente viscosa dimostra che la pressione in prossimità del punto di ristagno ha un andamento esattamente uguale a quello nella corrente inviscida irrotazionale, per cui la presenza della viscosità non influenza la misura della pressione di ristagno. Il teorema di Bernoulli descrive quindi in modo adeguato il legame fra le condizioni a grande distanza davanti al naso della sonda e le condizioni nella regione del punto di ristagno e dentro il condotto della presa anteriore, e questo indipendentemente dagli effetti viscosi. A questo punto, se conoscessimo la pressione nella regione all'infinito da cui proviene la corrente, potremmo ricavare anche la velocità in tale regione, ottenendo la relazione

$$U_{\infty} = \sqrt{\frac{2(P_{\text{ant}} - P_{\infty})}{\rho}}.$$

Purtroppo, in molti casi, il valore di P_{∞} non è noto e non è nemmeno misurabile direttamente in modo agevole, per cui diventa necessario misurare la pressione in un altro punto, che nel nostro caso sarà la presa laterale.

Presa di pressione laterale (pressione statica)

Il valore della pressione misurato nella presa laterale è molto più complicato da mettere in relazione con la corrente esterna di quello misurato nella presa anteriore. Indichiamo con P_{lat} la pressione alla presa laterale dello strumento: questo valore è misurato da un trasduttore posto in un punto alla fine del condotto che inizia nel foro della presa laterale. Il valore P_{lat} alla presa laterale fornito dalla sonda è indicato normalmente con il nome di **pressione statica**.

I valori della pressione P_{lat} e della pressione P_{∞} a monte della sonda sono valutati in regioni molto distanti e quindi la relazione precedente, basata sul teorema di Bernoulli, non sembra utilizzabile immediatamente per ricavare il valore di U_{∞} . In realtà, lo strumento è costruito proprio in modo tale che i due valori P_{lat} e P_{∞} siano tanto vicini da potere assumere $P_{\text{lat}} \simeq P_{\infty}$, con ottima approssimazione. La dimostrazione di questa proprietà è tuttavia tutt'altro che banale poiché coinvolge in successione le approssimazioni connesse a tre diversi aspetti del tubo di Pitot e della corrente vicina e dentro la presa laterale: la forma affusolata della sonda, la presenza di uno strato limite sulla sua superficie e il foro della presa laterale. Per analizzare questi aspetti è utile considerare due punti nel campo di moto vicino alla presa laterale: un primo punto si trova all'esterno dello strato limite sulla superficie del tubo e sarà indicato con \mathbf{r}_{est} mentre il secondo si trova al centro del foro della presa laterale e sarà indicato con \mathbf{r}_{foro} . La pressione del fluido in tali punti sarà indicata, rispettivamente, con $P_{\text{est}} = P(\mathbf{r}_{\text{est}})$ e $P_{\text{foro}} = P(\mathbf{r}_{\text{foro}})$. Nel passaggio dalla regione asintotica fino al punto del trasduttore della presa laterale, la pressione assumerà i seguenti valori:

$$P_{\infty} \longrightarrow P_{\text{est}} \longrightarrow P_{\text{foro}} \longrightarrow P_{\text{lat}}.$$

Per quanto riguarda il primo passaggio $P_{\infty} \rightarrow P_{\text{est}}$ la pressione varierà in un modo che dipende dalla forma della sonda. Dato che il punto \mathbf{r}_{est} si trova all'esterno dello strato limite, si può analizzare la corrente e trovare l'andamento di $P(\mathbf{r})$ basandosi sul modello di corrente incompressibile irrotazionale applicato a un corpo con la forma affusolata della sonda. Il ruolo che gioca la forma geometrica della sonda nel determinare la posizione ottimale della presa laterale sarà discusso più avanti. Per i nostri scopi attuali è sufficiente anticipare il risultato che la presa laterale è posta a una distanza ottimale dalla punta del Pitot così che, con ottima approssimazione

$$P_{\text{est}} \simeq P_{\infty} \quad (\text{posizione ottimale della presa laterale}).$$





Il secondo passaggio $P_{\text{est}} \rightarrow P_{\text{foro}}$ riguarda invece l'attraversamento dello strato limite che si forma inevitabilmente sulla superficie laterale del tubo. Infatti, a causa della viscosità del fluido, per quanto piccola, il fluido aderisce perfettamente alla parete della sonda (condizione al contorno di perfetta adesione) e quindi esiste uno strato limite viscoso in prossimità della parete, per numeri di Reynolds sufficientemente alti. Dalla teoria dello strato limite di Prandtl sappiamo che al suo interno la pressione non varia in direzione trasversale alla velocità, ovvero si può ritenere

$$P_{\text{foro}} \simeq P_{\text{est}} \quad (\text{andamento della pressione nello strato limite}).$$

Notare che l'esistenza dello strato limite preclude qualunque considerazione basata sul teorema di Bernoulli per collegare i valori della pressione nei due punti in esame. I due risultati trovati fino a questo punto, assieme, implicano che $P_{\text{foro}} \simeq P_{\infty}$.

Ma veniamo al terzo (e ultimo) passaggio, cioè $P_{\text{foro}} \rightarrow P_{\text{lat}}$ che si svolge dentro il condotto verso il trasduttore della presa laterale. A prima vista si potrebbe pensare che tutto il gas dentro questo condotto sia fermo come quello nel condotto della presa anteriore. Ciò è falso dato che la corrente che scorre all'esterno del foro trascina per attrito viscoso il fluido dentro la presa, in un moto di tipo circolatorio tipico delle cavità aperte con una corrente esterna tangente. In questa corrente secondaria gli effetti della viscosità sono rilevanti per cui, ancora una volta, il teorema di Bernoulli non può essere applicato. D'altra parte, se il foro della presa laterale è molto piccolo rispetto alla lunghezza della sonda, si può ritenere che la corrente ricircolante nella cavità abbia un'estensione molto ridotta per cui vale l'approssimazione

$$P_{\text{lat}} \simeq P_{\text{foro}} \quad (\text{foro della presa laterale molto piccolo}),$$

con accuratezza accettabile.

Combinando questo risultato con gli altri due ottenuti in precedenza, si conclude che vale l'approssimazione complessiva

$$P_{\text{lat}} \simeq P_{\infty}.$$

Utilizzando questo risultato nella relazione di U_{∞} ottenuta dal teorema di Bernoulli per la corrente incidente sulla presa anteriore, si ricava

$$U_{\infty} = \sqrt{\frac{2(P_{\text{ant}} - P_{\text{lat}})}{\bar{\rho}}},$$

dove entrambe le pressioni sono i valori misurati dallo strumento.

È importante ricordare che questo risultato non è una conseguenza *solo* del teorema di Bernoulli per correnti incomprimibili irrotazionali, ma dipende *anche* da tutte le considerazioni precedenti che coinvolgono sia le caratteristiche geometriche della sonda sia alcune proprietà dinamiche della corrente nello strato limite.

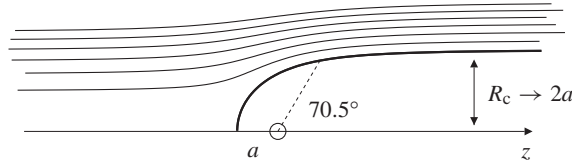
Effetti dovuti alla geometria

Esaminiamo ora quale sia la posizione ottimale della presa laterale lungo il tubo di Pitot. Per rispondere a questa domanda è necessario conoscere il campo di moto intorno allo strumento quando esso è inserito nella corrente di cui si vuole determinare la velocità uniforme U_{∞} . A tale fine risulta conveniente schematizzare la forma del tubo di Pitot come un'ogiva semi-infinita di Rankine mostrata nella figura P.2, ripresa dal capitolo 7, e descrivere il moto del fluido attorno ad esso come una corrente incomprimibile e inviscida.





Figura P.2 Sezione della parte anteriore di un'ogiva semi-infinita di Rankine



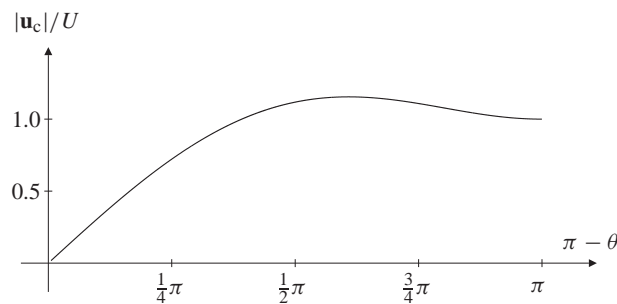
Di questo problema si conosce la soluzione analitica costituita da un campo di moto potenziale assisimmetrico, che è stato calcolato nel paragrafo 7.1. In particolare, sappiamo che la velocità massima sulla superficie dell'ogiva è circa del 15% superiore alla velocità della corrente indisturbata. Utilizzando allora l'espressione della velocità della soluzione potenziale, possiamo determinare a quale distanza dalla punta del tubo di Pitot deve essere posta la presa di pressione laterale affinché la perturbazione della velocità sia minore dell'1% rispetto alla velocità indisturbata.

Per fare ciò ricordiamo la relazione trovata nel paragrafo 7.1 che esprime il valore del modulo della velocità sulla superficie dell'ogiva di Rankine, in funzione della coordinata angolare:

$$|\mathbf{u}_c(\theta)|^2 = \frac{U_\infty^2}{4}(5 + 2 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta),$$

dove θ è l'angolo misurato a partire dall'asse dell'ogiva in direzione concorde con la velocità, come mostrato nella figura P.3.

Figura P.3 Distribuzione della velocità sulla superficie di un'ogiva semi-infinita di Rankine



Superato il punto di massimo per $\theta = 70.5^\circ$, la velocità $|\mathbf{u}_c|$ resta maggiore della velocità U_∞ nella corrente indisturbata ma tende a questo valore muovendosi verso valle lungo l'ogiva. Determiniamo perciò il punto in cui la velocità sulla superficie dell'ogiva supera dell'1% la velocità della corrente indisturbata, $|\mathbf{u}_c(\theta)| = 1.01 U_\infty$. Introducendo questa condizione nell'equazione precedente e risolvendo si ottiene $\theta = 11.6^\circ$, che corrisponde a una distanza di circa tre diametri dalla punta del tubo di Pitot.

Questo significa che per ottenere una sonda di buona precisione occorre che la presa di pressione laterale sia sufficientemente lontana dal naso ma in un punto in cui lo spessore dello strato viscoso sia ancora molto sottile. Si deve infine porre attenzione anche al fatto che la sonda presenta un sostegno, di solito posto di traverso rispetto all'asse del tubo. Il sostegno perturba la corrente e la rallenta anche a monte della sua posizione. È necessario perciò che la presa laterale sia posta davanti al sostegno e sufficientemente distante da esso. La geometria ideale è quella in cui la posizione della presa laterale è tale da far sì che i due effetti citati (accelerazione e rallentamento) tendano a compensarsi mutuamente. In conclusione, in un tubo di Pitot progettato correttamente si può assumere con sufficiente precisione $|\mathbf{u}_{\text{est}}| \simeq U_\infty$, per cui, grazie al teorema di Bernoulli valido nella regione della corrente esterna inviscida, si ha:

$$P_{\text{est}} \simeq P_\infty.$$





Errori di allineamento

Quanto detto finora si riferisce al caso in cui il tubo di Pitot sia perfettamente allineato con la corrente incidente. In realtà l'allineamento non è mai realizzabile in modo esatto. Sperimentalmente si osserva però che la misura più affetta da variazioni nel caso di leggeri disallineamenti è quella della pressione alla presa laterale, e che la misura dipende molto dalla posizione del foro. Per ridurre la dipendenza di tale misura dal disallineamento della sonda, si realizza un certo numero di prese di pressione, poste sulla superficie del tubo di Pitot lungo la circonferenza di una sua sezione, e le varie prese sono collegate mediante dei condotti dentro lo strumento. Questo accorgimento consente di ridurre la sensibilità della sonda agli errori causati da un erroneo allineamento rispetto alla corrente incidente.

Osservazione La variabile pressione che compare in tutte le relazioni precedenti corrisponde, naturalmente, alla pressione delle correnti incompressibili. Quindi, come di consueto, tale variabile è il moltiplicatore di Lagrange necessario a soddisfare il vincolo di incompressibilità ed è privo di qualunque connotazione termodinamica. D'altra parte nel tubo di Pitot si misura l'effettiva pressione termodinamica del fluido (liquido o gas) in esame. L'efficacia dello strumento nelle misure è indice del legame quantitativo esistente fra queste due grandezze nel regime di corrente incompressibile, cioè quando gli effetti di comprimibilità sono trascurabili.

P.3 Correnti comprimibili

L'analisi svolta fino a questo punto si basa chiaramente sul teorema di Bernoulli e perciò sull'ipotesi di corrente stazionaria incompressibile. Sappiamo che, quando il numero di Mach della corrente incidente non è più molto minore di 1, ma ha un valore, diciamo, di almeno circa 0.3, per cui la corrente non può più essere considerata incompressibile. Cerchiamo perciò di formulare una teoria in grado di descrivere il funzionamento del tubo di Pitot investito da una corrente comprimibile. Iniziamo considerando una corrente stazionaria ovunque subsonica riservandoci di esaminare in seguito il caso in cui il numero di Mach della corrente indisturbata sia invece supersonico. In quanto segue riterremo sempre che il fluido possa essere considerato un gas ideale e politropico.

Corrente subsonica

Come in precedenza, ipotizziamo inizialmente che il gas sia non viscoso e che la corrente sia irrotazionale. Supponiamo inoltre che la corrente sia isentropica. Affinché queste ipotesi siano verificate dobbiamo supporre che il campo di moto sia ovunque subsonico e che non esista alcuna regione di corrente transonica. In altre parole non possiamo accettare che l'accelerazione della corrente in prossimità del naso del tubo di Pitot porti a raggiungere numeri di Mach locali maggiori di 1, con la conseguente formazione di un'onda d'urto che farebbe cadere l'ipotesi di isentropicità della corrente.

Nel paragrafo 9.8 abbiamo visto che, nel caso di corrente isentropica, è possibile mettere in relazione le grandezze fisiche di ristagno con le grandezze fisiche e il numero di Mach che caratterizzano la corrente imperturbata. In particolare, la pressione misurata in corrispondenza della presa anteriore corrisponde alla pressione di ristagno ed è legata alla pressione e al numero di Mach della corrente imperturbata dalla relazione

$$\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\infty}} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\infty}^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

dove $M_{\infty} = U_{\infty}/c_{\infty}$ e c_{∞} è la velocità del suono della corrente imperturbata. Si noti l'assenza del segno negativo nell'esponente.

D'altra parte, sempre nell'ipotesi che gli effetti viscosi siano descritti in modo adeguato dalla teoria dello strato limite, è legittimo ritenere che la presa di pressione laterale si trovi sulla stessa linea di corrente che passa per il punto di ristagno nella





presa anteriore, per cui la pressione P_{lat} è data da una relazione analoga alla precedente

$$\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\text{lat}}} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{est}}^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

dove $M_{\text{est}} = |\mathbf{u}_{\text{est}}|/c_{\text{est}}$. Risolvendo la relazione rispetto a M_{est} , si ricava il numero di Mach in corrispondenza della presa laterale in funzione del rapporto delle pressioni misurate P_{ant} e P_{lat} :

$$M_{\text{est}}^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\text{lat}}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right].$$

Per ottenere, a questo punto, il valore di $|\mathbf{u}_{\text{est}}|$ all'esterno della presa di pressione laterale occorre conoscere il valore della velocità del suono locale c_{est} . Questa grandezza può essere calcolata in funzione della temperatura T_{est} mediante la relazione $c_{\text{est}} = \sqrt{\gamma R T_{\text{est}}}$. La temperatura T_{est} può essere calcolata a sua volta a partire dal numero di Mach M_{est} , una volta che sia stata misurata la temperatura T_0 nel punto di ristagno, per mezzo della relazione

$$\frac{T_0}{T_{\text{est}}} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{est}}^2 \right]^{-1} \Rightarrow T_{\text{est}} = T_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{est}}^2 \right].$$

Otteniamo quindi

$$|\mathbf{u}_{\text{est}}| = c_{\text{est}} M_{\text{est}} = \sqrt{\gamma R T_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{est}}^2 \right]} M_{\text{est}}.$$

Per quanto riguarda gli effetti geometrici e gli effetti viscosi valgono anche qui le considerazioni fatte in precedenza. Occorre soltanto notare che, a causa degli effetti della comprimibilità del fluido, le prese di pressione laterali devono essere poste più lontano dal naso del tubo di Pitot rispetto al caso incomprimibile per mantenere l'errore di misura al di sotto della medesima soglia. Quindi, la velocità in corrispondenza della presa laterale è in buona approssimazione uguale alla velocità della corrente indisturbata, ossia $|\mathbf{u}_{\text{est}}| \simeq U_{\infty}$, cosicché possiamo scrivere

$$U_{\infty} = \sqrt{\gamma R T_0 \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{est}}^2 \right]} M_{\text{est}},$$

done M_{est} è espresso in funzione del rapporto delle pressioni $P_{\text{ant}}/P_{\text{lat}}$ mediante la relazione trovata precedentemente.

Corrente supersonica

Consideriamo infine il caso in cui la corrente incidente sul tubo di Pitot abbia velocità supersonica. La particolarità di questo caso nasce dal fatto che la presenza stessa del tubo di Pitot dà luogo a un'onda d'urto staccata a monte dello strumento, a causa dell'arresto che esso produce nel flusso in corrispondenza della presa anteriore. Supponendo che l'asse del tubo di Pitot sia allineato con la corrente incidente, la corrente supersonica è comunque assisimmetrica e lungo la linea di corrente coincidente con l'asse si possono applicare le relazioni di salto dell'urto piano normale. Questo vuol dire che in corrispondenza della presa di pressione anteriore non misureremo la pressione di ristagno della corrente imperturbata, bensì la pressione di ristagno della corrente a valle dell'urto piano normale.

Per quanto riguarda invece la pressione P_{lat} , misurata mediante la presa di pressione laterale, si osserva sperimentalmente che essa tende alla pressione P_{∞} della corrente indisturbata man mano che la posizione della presa di pressione si allontana dal naso del tubo di Pitot. Per distanze superiori a circa 8 diametri si può assumere infatti che la differenza fra le due pressioni sia inferiore all'1% e quindi si accetta come sufficientemente accurata l'approssimazione $P_{\text{lat}} \simeq P_{\infty}$.





È possibile a questo punto ricavare una relazione che legghi fra loro la pressione di ristagno dopo l'urto misurata sulla presa anteriore e la pressione della corrente imper turbata a monte dell'urto. Per fare questo partiamo dalla relazione che lega la pressione nel punto di ristagno del tubo di Pitot e la pressione immediatamente a valle dell'urto

$$\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\text{d.u.}}} = \left[1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M_{\text{d.u.}}^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

dove con il pedice d.u. abbiamo indicato il punto che si trova immediatamente dopo l'urto e sul prolungamento dell'asse di simmetria del tubo di Pitot. Possiamo ora esprimere il numero di Mach M_{∞} a monte dell'urto mediante le relazioni di salto dell'onda d'urto normale,

$$M_{\infty}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{\text{d.u.}}^2 + 2}{2\gamma M_{\text{d.u.}}^2 - (\gamma - 1)} \iff M_{\text{d.u.}}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{\infty}^2 + 2}{2\gamma M_{\infty}^2 - (\gamma - 1)}.$$

Questa relazione ci permette di eliminare il numero di Mach immediatamente a valle dell'urto dalla relazione precedente, ottenendo

$$\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\text{d.u.}}} = \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_{\infty}^2}{4\gamma M_{\infty}^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Introduciamo ora un'altra relazione di salto, quella che lega fra loro le pressioni a monte e immediatamente a valle di un urto normale, con la notazione utilizzata fino a questo punto scriviamo

$$\frac{P_{\text{d.u.}}}{P_{\infty}} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{\infty}^2 - 1).$$

Moltiplicando fra loro entrambi i membri delle ultime due equazioni la grandezza incognita $P_{\text{d.u.}}$ si elimina e otteniamo la **formula di Rayleigh** per il tubo di Pitot in regime supersonico

$$\frac{P_{\text{ant}}}{P_{\infty}} = \frac{2\gamma M_{\infty}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left[\frac{(\gamma + 1)^2 M_{\infty}^2}{4\gamma M_{\infty}^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Questa relazione, se invertita, permetterebbe di ricavare il numero di Mach a monte dell'urto a partire dalle due misure di pressione effettuate col tubo di Pitot, dal momento che vale l'approssimazione $P_{\infty} \simeq P_{\text{lat.}}$. Tuttavia, non è possibile ricavare M_{∞}^2 in funzione del rapporto $P_{\text{ant}}/P_{\infty}$ in forma chiusa e quindi occorre risolvere di volta in volta l'equazione mediante metodi numerici o riferirsi a tabelle.

In regime supersonico il tubo di Pitot viene generalmente utilizzato per determinare il solo numero di Mach a monte dell'urto e per questo motivo sulla maggior parte dei testi l'analisi si ferma qui. È però possibile ricavare anche il modulo della velocità. Per fare questo è necessario determinare anche la velocità del suono c_{∞} a monte dell'onda d'urto, che per un gas ideale politropico è funzione solo della temperatura T_{∞} . Il valore di T_{∞} può essere calcolato a partire dalla misura della temperatura T_0 nel punto di ristagno a valle dell'urto, misurata per esempio sul naso del tubo di Pitot.

Infatti, nella corrente isentropica dietro l'urto la conservazione dell'entalpia totale si può esprimere anche come costanza della cosiddetta temperatura totale, per cui risulta $T_{\text{d.u.}}^{\text{tot}} = T_0$. Ma, come mostrato alla fine dell'appendice N sull'urto normale, l'entalpia totale si conserva anche attraverso l'urto e quindi per il gas ideale politropico vale la relazione $T_{\infty}^{\text{tot}} = T_{\text{d.u.}}^{\text{tot}}$. Di conseguenza abbiamo

$$T_{\infty}^{\text{tot}} = T_0.$$





Utilizzando pertanto la relazione che definisce la cosiddetta temperatura totale

$$\frac{T^{\text{tot}}}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2,$$

con la velocità espressa in termini del numero di Mach, possiamo ottenere la temperatura a monte dell'urto T_∞

$$T_\infty = \frac{2T_\infty^{\text{tot}}}{(\gamma - 1)M_\infty^2 + 2} = \frac{2T_0}{(\gamma - 1)M_\infty^2 + 2},$$

e infine la velocità del suono a monte dell'urto

$$c_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{(\gamma - 1)M_\infty^2 + 2}}.$$

Il modulo della velocità a monte dell'onda d'urto è quindi dato dalla relazione

$$U_\infty = c_\infty M_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{(\gamma - 1)M_\infty^2 + 2}} M_\infty.$$

